Проводящий шар в однородном поле

А.ЧЕРНОУЦАН

В этой статье мы рассмотрим одну-единственную задачу – о проводящем шаре, внесенном в однородное электрическое поле. Полное решение включает в себя как вычисление распределения заряда по поверхности шара, так и определение напряженности поля в окружающем пространстве. Трудность задачи состоит в том, что распределение заряда заранее не известно, и поэтому для вычисления поля нельзя просто воспользоваться методом суперпозиции.

Для полного или хотя бы частичного решения таких задач порой используют соображения симметрии, но в большинстве случаев приходится фактически угадывать ответ. В основе всех «угадывательных» подходов лежит *теорема единственности*, смысл которой состоит в том, что хорошо угаданное решение и есть единственно правильное. Иногда удается угадать распределение зарядов на проводнике, исходя из которого вычисляется поле, иногда наоборот — сначала угадывают поле, а потом уже вычисляют распределение заряда. Самым красивым методом угадывания (или подбора) решения является известный *метод электростатических изображений*, с помощью которого решаются такие важные задачи, как проводящая плоскость или проводящий шар в поле точечного заряда.

Задача о проводящем шаре в однородном поле интересна тем, что позволяет продемонстрировать несколько подходов, в том числе соображения симметрии и метод электростатических изображений. Однако начнем мы с того, что дадим точную формулировку задачи и сразу же приведем ее ответ — тот самый, который затем будем получать различными способами и с разных сторон.

Формулировка и ответ

Формулировка:

В однородное поле с напряженностью $\vec{E}_0$ помещают незаряженный проводящий шар радиусом R.

а) Требуется найти распределение наведенного заряда по поверхности шара. Ясно, что поверхностная плотность заряда σ может зависеть только от угла θ, который образует с вектором $\vec{E}_0$ радиус, проведенный к данной точке поверхности (рис.1). Значит, ответ должен выражаться функцией $\sigma(\theta)$.

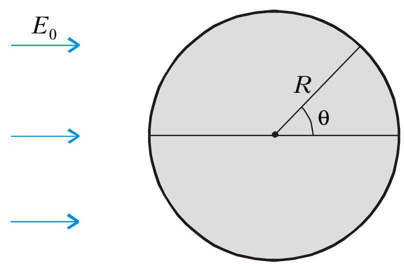

Рис. 1

б) Требуется определить поле, создаваемое этим наведенным зарядом в пространстве вне шара. Ответ должен выражаться либо функцией $\vec{E}_{\text{нав}}(r,\theta)$, где r — расстояние от выбранной точки до центра шара ($r > R$), либо функцией $\varphi_{\text{нав}}(r,\theta)$, либо указанием алгоритма по их вычислению. Полная напряженность будет при этом равна $\vec{E} = \vec{E}_{\text{нав}} + \vec{E}_0$. Заметим, что так как полная напряженность внутри шара должна быть равна нулю, наведенный заряд при $r < R$ должен создавать напряженность $-\vec{E}_0$.

Ответ:

а) Зависимость поверхностной плотности заряда от угла θ имеет вид

$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta, \qquad (1)$$

где максимальная плотность σ_0 выражается через напряженность E_0:

$$\sigma_0 = 3\varepsilon_0 E_0 \qquad (2)$$

(ε_0 — электрическая постоянная).

б) Поле вне шара совпадает с полем *точечного диполя* с дипольным моментом

$$\vec{p} = 3V\varepsilon_0 \vec{E}_0 \qquad (3)$$

(V — объем шара), помещенного в центр шара.

Если вы успели забыть (или не успели узнать), что такое диполь и что такое дипольный момент, напоминаем: диполем называют систему двух точечных зарядов q и $-q$, а дипольный момент $\vec{p}$ такого диполя равен $q\vec{l}$, где $\vec{l}$ — вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному. На большом расстоянии ($r >> l$) поле диполя определяется его дипольным моментом. Соответствующие формулы выведены в Приложении, а здесь нам осталось пояснить, что такое точечный диполь. Этот идеальный бесконечно малый объект получается предельным переходом $l \to 0$, $q \to \infty$, при котором величина дипольного момента $p = ql$ остается постоянной.

Теорема единственности

Как уже было сказано, теорема единственности является важным подспорьем для всякого, кто пытается решить какую-нибудь не очень тривиальную задачу электростатики или хочет достаточно строго обосновать какое-нибудь утверждение. Поэтому мы сочли уместным выделить отдельный параграф для ее обсуждения.

Отметим, что задачи с проводниками могут формулироваться по-разному – для каждого из проводников может быть задан или его заряд, или его потенциал. Но в любом случае существует единственное решение поставленной задачи.

Для дальнейшего удобно «заготовить» две формулировки теоремы единственности.

Первая формулировка. Существует единственное *распределение зарядов* по поверхности проводников, при котором напряженность поля внутри проводника равна нулю, а заряды (или потенциалы) проводников равны заданным значениям. Исходя из такого подхода решается, например, задача о распределении заряда по поверхности тонкого проводящего диска (см. «Квант» №1 за 1998 г.).

Вторая формулировка. Существует единственное *распределение напряженности поля* в пространстве вне проводников, при котором поверхности проводников оказываются эквипотенциальными, а заряды (или потенциалы) проводников равны заданным значениям. Именно такой подход (подбор правильного поля) лежит в основе метода электростатических изображений (см. «Квант» №1 за 1996 г.).

Соображения симметрии

Исходя из соображений симметрии (и единственности) можно дать столь простое и изящное доказательство формулы (1), что кажется, будто она возникает «из ничего», как кролик из шляпы фокусника. Мы представим это доказательство в виде цепочки последовательных утверждений.

Утверждение 1. Во всех точках окружности большого круга, перпендикулярного напряженности $\vec{E}_0$ (т.е. в точках с $\theta = 90°$), поверхностная плотность заряда равна нулю (рис.2). Это

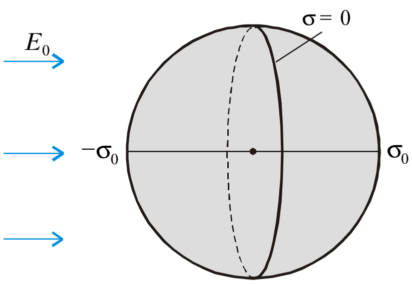

Рис. 2

следует из симметрии между положительными и отрицательными зарядами.

Утверждение 2. Если при помещении шара в поле с напряженностью $\vec{E}_1$ поверхностная плотность заряда в некоторой точке равна σ_1, а при помещении в поле с напряженностью $\vec{E}_2$ она равна σ_2, то в поле с напряженностью $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ поверхностная плотность заряда в этой точке будет $\sigma_1 + \sigma_2$. То, что поверхностные плотности, наведенные разными полями, складываются, следует из теоремы единственности: каждая поверхностная плотность уничтожит свою напряженность, и *полная напряженность* останется равной нулю, поскольку существует лишь *единственное* распределение заряда, удовлетворяющее этому условию.

Утверждение 3. Если напряженность внешнего поля увеличить в α раз ($\vec{E}' = \alpha \vec{E}$), то поверхностная плотность заряда в каждой точке увеличится в α раз ($\sigma' = \alpha\sigma$). Действительно, увеличение в α раз плотности заряда приведет к увеличению в α раз собственной напряженности, и полная напряженность внутри шара останется равной нулю — в дело опять вступает теорема единственности...

Основное рассуждение. Рассмотрим шар, помещенный в однородное поле $\vec{E}_0$ (рис.3). Пусть максимальная плотность наведенного заряда (при $\theta = 0$) равна σ_0. Чтобы найти $\sigma(\theta)$, разложим $\vec{E}_0$ на две взаимно перпендикулярные составляющие: $\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, одна из которых ($\vec{E}_1$) составляет с $\vec{E}_0$ угол θ. Поскольку $E_1 = E_0 \cos\theta$, при помещении шара в поле $\vec{E}_1$ максимальная плотность заряда в точке A будет $\sigma_0 \cos\theta$ (см. утверждение 3). А если поместить шар в поле $\vec{E}_2$, поверхностная плотность заряда в точке A будет равна нулю (см. утверждение 1). Значит, в соответствии с утверждением 2, в поле $\vec{E}_0$ поверхностная плотность заряда в точке A будет $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$.

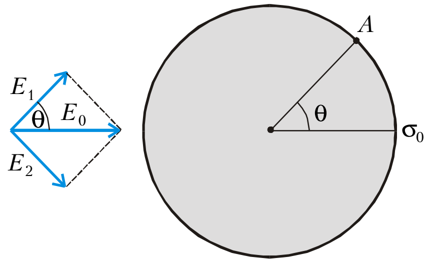

Рис. 3

Конечно, такое рассуждение не позволяет сразу определить, чему равна σ_0. Но эта задача гораздо проще, чем задача об определении неизвестного распределения заряда. Когда распределение уже известно, можно воспользоваться принципом суперпозиции, выразить напряженность, создаваемую этим распределением в центре шара, и приравнять ее к E_0. Если вы умеете интегрировать, попробуйте таким образом получить формулу (2).

Однако задача о напряженности, создаваемой наведенными зарядами вне шара, в рамках этого подхода остается нерешенной. Два других подхода позволят нам получить более полное решение поставленной задачи.

Метод электростатических изображений

Метод электростатических изображений позволяет не угадать распределение наведенных зарядов по поверхности, а определить создаваемое ими поле, заменив его полем воображаемых зарядов (изображений), расположенных внутри проводника. Заряды-изображения подбираются так, чтобы полное поле, создаваемое ими и внешними зарядами, имело «правильные» свойства на границе проводника. Например, если проводник по условию заземлен, то это поле должно иметь всюду на границе нулевой потенциал. Если же задан заряд проводника, то, во-первых, поверхность проводника должна быть эквипотенциальной и, во-вторых, сумма зарядов-изображений должна быть равна заданному заряду. Поскольку существует единственное поле, удовлетворяющее таким, как их называют, «граничным условиям», то поле зарядов-изображений должно совпадать с полем наведенных зарядов проводника. Вот несколько примеров.

Пример 1. Точечный заряд и проводящая плоскость. Этот пример хорошо известен многим школьникам. Если точечный заряд q поднести на расстояние a к бесконечной проводящей плоскости (рис.4,*а*), то возникающее при этом поле совпадает с полем двух точечных зарядов (рис.4,*б*): самого заряда q и заряда-изображения $-q$, расположенного за плоскостью симметрично заряду q (как изображение источника света в плоском зеркале). Действительно, эквипотенциальная поверхность поля двух таких зарядов с $\varphi = 0$ совпадает с поверхностью проводника. Иначе говоря, поле, создаваемое наведенными зарядами в пустом пространстве, совпадает с полем одного точечного заряда $-q$.

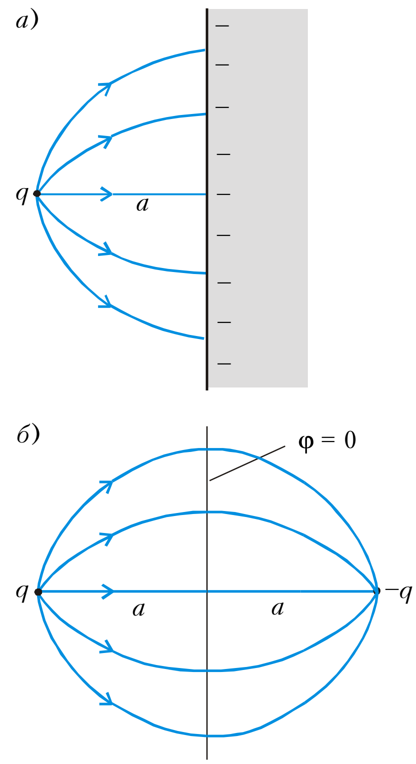

Рис. 4

Пример 2. Точечный заряд и заземленный шар. Если к заземленному шару радиусом R на расстоянии L от его центра ($L > R$) поднести точечный заряд q (рис.5,*а*), то возникающее поле совпадает с полем двух точечных зарядов (рис.5,*б*): самого заряда q и заряда-изображения, равного

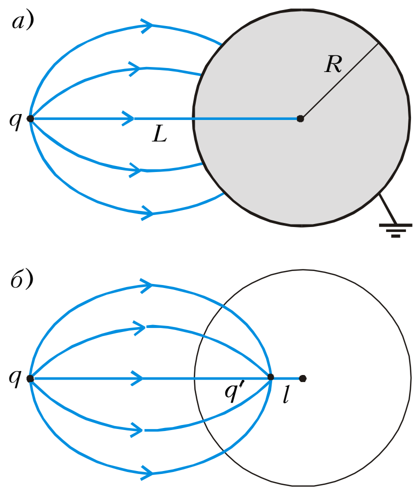

Рис. 5

$q' = -qR/L$ и расположенного на расстоянии $l = R^2/L$ от центра шара.

Тождественное совпадение этих двух полей следует из утверждения, что эквипотенциальная поверхность с $\varphi = 0$ для поля зарядов q и q' совпадает с поверхностью шара. Убедимся в этом. Возьмем произвольную точку A на поверхности шара (рис.6) и обозначим через r_1 расстояние от

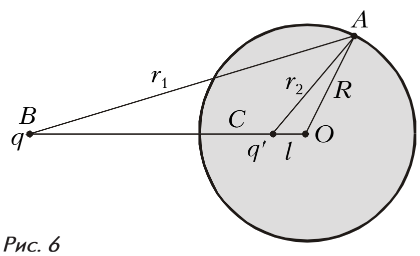

Рис. 6

нее до заряда q (точка B), а через r_2 — расстояние до заряда q' (точка C). Поскольку $AO : OC = R/l = L/R = BO : OA$, треугольник AOC подобен треугольнику BOA. Значит, для любой точки A отношение r_1/r_2 равно L/R и потенциал $\varphi(A) = kq/r_1 + kq'/r_2$ равен нулю (напомним, что $q' = -qR/L$).

Иначе говоря, поле, создаваемое наведенными зарядами вне шара, совпадает с полем одного точечного заряда q'.

Пример 3. Точечный заряд и заряженный шар. Если в условии предыдущего примера заменить заземленный шар на заряженный зарядом Q, то к заряду-изображению q' необходимо добавить второй заряд-изображение $q'' = Q - q'$, помещенный в центр шара.

Каким же образом можно использовать метод электростатических изображений в случае проводящего шара в однородном поле? Поскольку результат не должен зависеть от того, какая система зарядов является источником поля $\vec{E}_0$, будем считать, что оно создается двумя зарядами q и $-q$ (рис.7), расположенными симметрично относительно центра шара на большом от него расстоянии ($L \cong R$). Величину зарядов надо выбрать таким образом, чтобы создаваемая ими в центре шара напряженность была равна E_0:

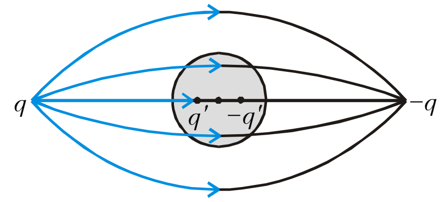

Рис. 7

$$\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 L^2} = E_0 .$$

Поле наведенных зарядов в пространстве вне шара будет совпадать с полем двух точечных зарядов q' и $-q'$, где $q' = -qR/L$, расположенных на расстоянии $l = R^2/L$ от центра. Два заряда-изображения образуют диполь с дипольным моментом, равным

$$p = q' \cdot 2l = \frac{2qR^3}{L^2} = 3V\varepsilon_0 E_0 ,$$

что совпадает с формулой (3). Если рассмотреть предельный переход, при котором заряды удаляются на бесконечность, но одновременно их величина меняется так, что напряженность поля остается равной E_0, то поле будет стремиться к однородному, а диполь будет стремиться к точечному (при сохранении дипольного момента).

Остается ответить на вопрос: как в рамках метода электростатических изображений найти не только поле наведенных зарядов, но и их распределение по поверхности? Это можно сделать с помощью соотношения, связывающего напряженность поля у поверхности проводника с поверхностной плотностью заряда:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} . \qquad (4)$$

Например, в случае заряда и проводящей плоскости нетрудно вычислить напряженность поля зарядов q и $-q$ на

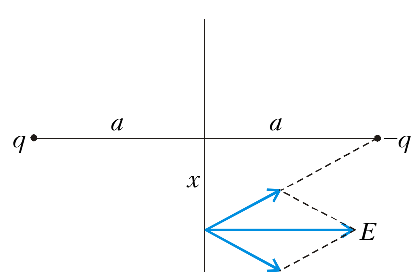

Рис. 8

расстоянии x от точки, лежащей посередине между ними (рис.8), и найти поверхностную плотность зарядов:

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{qa}{2\pi\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} .$$

В случае шара в однородном поле надо вычислить полное поле, равное сумме однородного внешнего поля и поля точечного диполя (см. Приложение) возле поверхности сферы. Попробуйте сделать это самостоятельно.

Как убедиться в справедливости формулы (4)? Проще всего это сделать с помощью теоремы Гаусса (кто с ней знаком), но можно обойтись и без нее. Представим поле вблизи поверхности в виде суперпозиции двух полей (рис.9): поля $\vec{E}_1$, созданного малым близлежащим участком поверхнос-

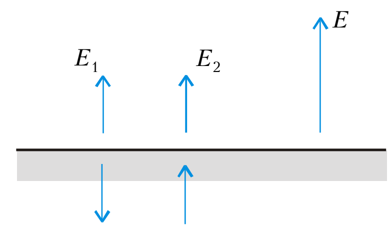

Рис. 9

ти, которое можно считать равным полю бесконечной плоскости $E_1 = \sigma/(2\varepsilon_0)$ (в пределе, когда расстояние до поверхности мало по сравнению с размером этого участка), и поля остальных зарядов $\vec{E}_2$. Внутри проводника эти два поля должны сократить друг друга, поэтому $E_2 = E_1 = \sigma/(2\varepsilon_0)$. Вне проводника эти напряженности складываются, откуда и получается формула (4).

Конечно, может возникнуть вопрос: а как (без теоремы Гаусса) получить формулу $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$ для напряженности бесконечной равномерно заряженной плоскости, на которую опирается этот вывод? Можно сделать это, рассмотрев поле равномерно заряженной сферы, которое совпадает (вне сферы) с полем точечного заряда, а вблизи поверхности равно σ/ε_0. Если провести такое же рассуждение, как выше, но в обратном порядке, то получим искомую формулу.

Метод наложения шаров

Последний из рассматриваемых здесь подходов к решению задачи о проводящем шаре в однородном поле дает наиболее полное, и притом достаточно простое, ее решение. Как и раньше, мы разобьем изложение этого метода на несколько последовательных этапов, каждый из которых представляет свою интересную задачу.

1. Равномерно заряженный шар. Рассмотрим шар радиусом R, равномерно заряженный с объемной плотностью ρ. Напряженность поля вне шара, при $r > R$, совпадает с полем точечного заряда $q = \rho V$:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho V}{r^2}. \qquad (5)$$

Внутри шара, при $r < R$, вклад в напряженность дают только заряды, находящиеся внутри сферы радиусом r, а вклад внешних слоев равен нулю:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(r)}{r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0},$$

где $q(r) = \rho \cdot 4/3\,\pi r^3$. Для дальнейшего удобно записать последнюю формулу в векторном виде:

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}. \qquad (6)$$

2. Наложение двух шаров. Рассмотрим два равномерно заряженных по объему шара: один с объемной плотностью ρ, другой с объемной плотностью $-\rho$. Пусть шары расположены так, что расстояние l между их центрами меньше суммы их радиусов, т.е. существует область их пересечения (рис. 10). Объемная плотность

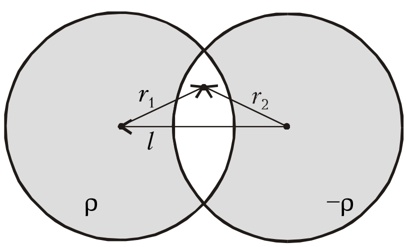

Рис. 10

заряда в этой области равна нулю, а поле равно суперпозиции полей двух шаров. Выберем произвольную точку в этой области и обозначим через $\vec{r}_1$ радиус-вектор, проведенный к этой точке из центра положительно заряженного шара, а через $\vec{r}_2$ – радиус-вектор, проведенный из центра отрицательно заряженного шара. В соответствии с формулой (6) получаем

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho\vec{r}_1}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho\vec{r}_2}{3\varepsilon_0} = -\frac{\rho\vec{l}}{3\varepsilon_0}, \qquad (7)$$

где $\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ — вектор, проведенный из центра отрицательно заряженного шара к центру положительно заряженного.

Мы установили, что поле в области пересечения двух разноименно заряженных (с одинаковой плотностью) шаров является однородным. Этот факт можно использовать для конструирования такого распределения зарядов по поверхности шара, которое уничтожит внешнее однородное поле. Покажем, как это сделать.

3. Шар в однородном поле. Рассмотрим два разноименно заряженных шара одного и того же радиуса R, центры которых смещены на малое расстояние l_0 $(l_0 ?\ R)$. Заряд получившейся системы почти всюду равен нулю, кроме двух тонких равномерно заряженных сегментов (рис.11): одного с плотностью ρ, другого с плотностью $-\rho$. Толщина этих сегментов в

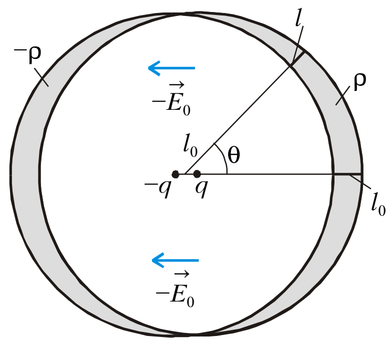

Рис. 11

самом толстом месте равна l_0 и уменьшается с углом θ по закону $l = l_0\cos\theta$. Ясно, как перейти к поверхностному заряду: надо рассмотреть предельный переход $l_0 \to 0$, но при этом так менять объемную плотность заряда ρ, чтобы заряд единицы поверхности, равный ρl_0, стремился к определенному пределу σ_0. Поскольку поле этих зарядов внутри полости должно уничтожать внешнее поле $\vec{E}_0$, в соответствии с формулой (7) получаем

$$-\frac{\rho\vec{l}_0}{3\varepsilon_0} = -\vec{E}_0$$

(вектор $\vec{l}_0$ проведен от центра отрицательного шара к центру положительного). Значит, предельное значение максимальной поверхностной плотности выражается через величину внешнего поля формулой

$$\sigma_0 = \rho l_0 \to 3\varepsilon_0 E_0,$$

совпадающей с формулой (2). Зависимость от угла θ тоже получается правильной: $\sigma = \rho l = \rho l_0\cos\theta = \sigma_0\cos\theta$. Кроме того, поле вне системы двух шаров совпадает с полем двух точечных зарядов $q = \rho V$ (см. формулу (5)) и в пределе переходит в поле точечного диполя с дипольным моментом

$$\vec{p} = q\vec{l}_0 = \rho V\vec{l}_0 \to 3V\varepsilon_0\vec{E}_0.$$

Приложение. Поле диполя

Чтобы вычислить поле точечного диполя, можно сначала написать точное выра-

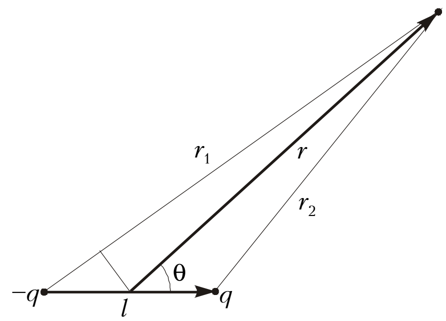

Рис. 12

жение для поля двух зарядов q и $-q$, а потом расстояние между ними устремить к нулю. Однако лучше вычислить поле конечного диполя сразу на большом расстоянии от него ($r \cong l$), где поля обоих диполей совпадают.

Проще всего вычислить потенциал поля диполя. Обозначив расстояние до центра диполя через r, расстояние до отрицательного заряда r_1, а до положительного r_2, получим (рис.12)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_1}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r - \frac{l}{2}\cos\theta} - \frac{q}{r + \frac{l}{2}\cos\theta}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\cos\theta}{r^2}.$$

Это выражение часто записывают через скалярное произведение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{p}\,\vec{r}\right)}{r^3}, \qquad (8)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра диполя.

Для вычисления напряженности поля можно воспользоваться связью между напряженностью и потенциалом. Мы оставим это упражнение тем, кто уже научился уверенно дифференцировать сложные выражения, и покажем, как можно обойтись без этого.

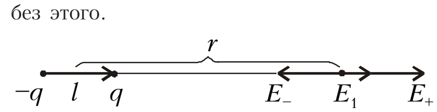

Рис. 13

Вычислим сначала напряженность для двух простых случаев – когда точка поля лежит на одной линии с зарядами (рис 13):

$$E_1 = E_+ - E_- =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{(r-l/2)^2} - \frac{q}{(r+l/2)^2}\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3},$$

или в векторном виде:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{r^3}, \qquad (9)$$

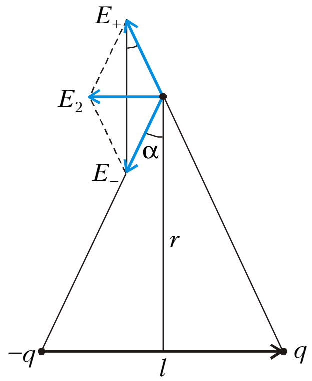

Рис. 14

и когда точка поля лежит на перпендикуляре к дипольному моменту (рис.14):

$$E_2 = 2E_+ \sin\alpha \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{r^2}\frac{l/2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^3},$$

или в векторном виде:

$$\vec{E}_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}. \qquad (10)$$

Теперь, чтобы найти напряженность поля в точке, для которой радиус-вектор образует с дипольным моментом угол θ, поступим следующим образом. Соединим отрицательный заряд с точкой поля (рис.15), опустим из положительного заряда перпендикуляр на эту линию и мысленно поместим в основание перпендикуляра два заряда: q и $-q$. Поскольку мы поместили их в одну точку, поле не изменилось, но мы получили вместо одного диполя два. У

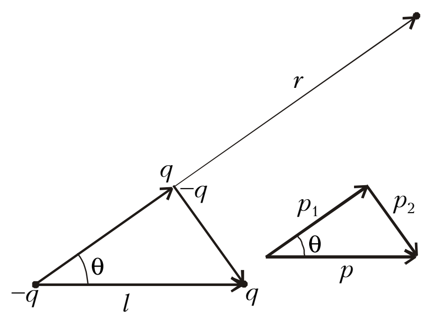

Рис. 15

одного из них дипольный момент $\vec{p}_1$ направлен параллельно радиусу-вектору $\vec{r}$, а у другого дипольный момент $\vec{p}_2$ перпендикулярен $\vec{r}$. Легко убедиться, что $p_1 = p\cos\theta$ (напомним, что $r \cong l$), или в векторном виде

$$\vec{p}_1 = \vec{r}\,\frac{\left(\vec{p}\,\vec{r}\right)}{r^2},$$

а $p_2 = p\sin\theta$, или в векторном виде

$$\vec{p}_2 = \vec{p} - \vec{p}_1.$$

Опираясь на формулы (9) и (10), можно вычислить параллельную и перпендикулярную вектору $\vec{r}$ составляющие поля:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2(p\cos\theta)}{r^3},\quad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3},$$

а можно, подставив векторные выражения для $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, получить ответ в векторном виде:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\left(\vec{p}\,\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right).$$