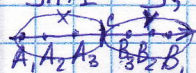


Лемма 3: (аксиома полноты Кантора)

Для любой последовательности вложенных отрезков $\{Y_n\}, n \in \mathbb{N}$, т.е. $Y_{n+1} \subset Y_n, \forall n \in \mathbb{N}; \exists c \in \mathbb{R} / c \in Y_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Док-во: $\rightarrow "X, Y \neq \emptyset, \forall x \in X, \forall y \in Y / x \leq y$, тогда $\exists c \in \mathbb{R} /$

$\forall x \in X, \forall y \in Y / x \leq c \leq y$. Нужно доказать, что если $Y_{n+1} \subset Y_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} / c \in Y_n, \forall n \in \mathbb{N}$.



а.) $Y_n = [A_n; B_n]$

$X = \{A_n, n \in \mathbb{N}\}$

$Y = \{B_n, n \in \mathbb{N}\}$

$A_1 \in X \Rightarrow X \neq \emptyset$

$B_1 \in Y \Rightarrow Y \neq \emptyset$

б) Предположим, что это не так, и $\exists x \in X, \exists y \in Y / y < x$.

$y < x \Leftrightarrow B_k < A_l$. Поскольку отрезки вложены друг в друга, то при $k > l$ отрезок $[A_k; B_k] \subset [A_l; B_l] \Rightarrow$ значит $A_l < B_k$.

И с предположением, что $B_k < A_l \Rightarrow x \leq y, \forall x \in X, \forall y \in Y$.

в.) Надо доказать, что $\forall n \in \mathbb{N} / A_n \leq c \leq B_n$.

Возьмем какое-то n , тогда $A_n \in X$, значит $A_n \leq c$ и $c \leq y, \forall y \in Y$. Возьмем $y = B_n$, тогда $A_n \leq c \leq B_n \Rightarrow c \in [A_n; B_n] \Rightarrow c \in Y_n, n \in \mathbb{N}$.

(к.р.)