

Бисет №4

Лемма 1 (аксиома полноты Вейерштрасса):

Всякое непустое и ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань.

Док-во: $\rightarrow$ 1) A16 $\Rightarrow$ Л1. Нужно доказать, что K -мн-во верхн. грани.

- а.) $X \neq \emptyset \leftarrow$ по условию непустое
б.) $Y \neq \emptyset \leftarrow$ по условию и по опред. огранич. сверху мн-ва.
в.) $\forall x \in X, \forall y \in Y \mid x \leq y \leftarrow$ по опред. верхних грани. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: \forall x \in X, \forall y \in Y \mid x \leq c \leq y$ (по акс. 16) $\Rightarrow c \in Y$; c -наим. из Y
 $\Rightarrow c = \sup X$

$\leftarrow$ 2) Л1 $\Rightarrow$ A16. $X, Y \neq \emptyset; \forall x \in X, \forall y \in Y \mid x \leq y$.

Нужно доказать, что $\exists c \in \mathbb{R}: \forall x \in X, \forall y \in Y \mid x \leq c \leq y$.

а.) $X \neq \emptyset \leftarrow$ по условию

б.) X о.р. сверху; т.к. $Y \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_0 \in Y$ и $\forall x \in X \mid x \leq y_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_0$ -верхняя граница $X \Rightarrow$ по лемме 1 $\exists c = \sup X$, т.е. т.к. c -верхняя граница X , значит $\forall x \in X \mid x \leq c$.

Нужно доказать, что $\forall y \in Y \mid c \leq y$.

$\forall y \in Y$ y -верхняя граница X .

а) c -наим. из верхних грани X $\Rightarrow c \leq y \Rightarrow c$ -верхняя грань X (и Y)

Лемма 2: Всякое непустое и ограниченное снизу множество имеет нижнюю грань.

Док-во: $\rightarrow$ 1) A16 $\Rightarrow$ Л2. Нужно доказать, что K -множество нижних грани.

а.) $X \neq \emptyset \leftarrow$ по условию непустое

б.) $Y \neq \emptyset \leftarrow$ по условию и по опред. ограниченного снизу мн-ва

в.) $\forall x \in X, \forall y \in Y \mid y \leq x \leftarrow$ по опред. нижних грани. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: \forall x \in X, \forall y \in Y \mid y \leq c \leq x \Rightarrow c \in Y$; c -наибольш. из Y . $\Rightarrow c = \inf X$.

$\leftarrow$ 2) Л2 $\Rightarrow$ A16. $X, Y \neq \emptyset; \forall x \in X, \forall y \in Y \mid y \leq x$.

Нужно доказать, что $\exists c \in \mathbb{R}: \forall x \in X, \forall y \in Y \mid y \leq c \leq x$.

а.) $X \neq \emptyset \leftarrow$ по условию.

б.) X ограничено снизу; т.к. $Y \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_0 \in Y$ и $\forall x \in X \mid y_0 \leq x \Rightarrow$

$\Rightarrow y_0$ -нижняя граница $X \Rightarrow$ по лемме 1 $\exists c = \inf X$, т.е. т.к. c -нижн. граница, значит $\forall x \in X \mid c \leq x$.

Нужно доказать, что $\forall y \in Y \mid y \leq c$.

$\forall y \in Y$ y -нижняя граница X , $\Rightarrow c \geq y \Rightarrow c$ -нижняя грань X (и Y)

а) c -наибольш. из нижн. грани X $\Rightarrow c \geq y \Rightarrow c$ -нижняя грань X (и Y)

(итд.)