Билет №1, №2.

Опр.: Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных чисел, а его элементы — действительными числами, если выполнены следующие аксиомы.

I. Аксиомы сложения.

Определим операцию $\oplus$: каждой паре $(x; y)$, где $x, y \in \mathbb{R}$, ставится в соответствие элем-т $\mathbb{R}$, который наз. суммой x и y.

① $\exists$ элем-т, который мы назовем нулем и будем обозн. „0", такой, что $\forall x \in \mathbb{R} \mid x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$.

② $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists$ элем-т, который мы будем наз. „противоположным к x" и обозн. „$-x$", такой, что $x \oplus (-x) = -x \oplus x = 0$.

③ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x \oplus y = y \oplus x$ (коммутативность сложения)

④ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ (ассоциативность сложения.) В будущем будем писать $x \oplus y \oplus z$.

Замечание 1.1: Разностью элем-тов x и y будем называть $x \oplus -y$ и будем писать $x \ominus y$.

II. Аксиомы произведения:

Определим операцию произведения $\otimes$. Каждой паре $(x; y)$ ставится элемент из $\mathbb{R}$, так, что выполнены аксиомы:

⑤ $\exists$ элем-т из $\mathbb{R}$, назовем его единицей и обозн. „1", такой, что $\forall x \in \mathbb{R} \mid 1 \otimes x = x \otimes 1 = x$.

⑥ $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $\exists$ элем-т, назовем его „обратным к x" и обозначим „x^{-1}", такой, что $x \otimes x^{-1} = x^{-1} \otimes x = 1$.

⑦ $\forall x, y \in \mathbb{R} \mid x \otimes y = y \otimes x$ (коммутативность произведения)

⑧ $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \mid (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$ (ассоциативность произведения). В будущем будем писать $x \otimes y \otimes z$.

⑨ $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \mid x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ (дистрибутивность умножения по отношению к сложению)

III. Аксиомы порядка.

Определим операцию, в которой каждой паре $(x; y)$, где $x, y \in \mathbb{R}$, ставится в соотв. „истина" или „ложь". Называть будем „меньше или равно" и обозначать $\leqslant$.

⑩ $\forall x \in \mathbb{R} \mid x \leq x$ ← истина (в дальнейшем будет счит. очев.)

⑪ $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x \leq y) \,\&\, (y \leq x) \Rightarrow x = y$

⑫ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \leq y) \,\&\, (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ (транзитивность).

⑬ $\forall x, y \in \mathbb{R} \mid (x \leq y) \vee (y \leq x)$.