

Введение в стереометрию

Конспект

Вопрос 1

Неопределимые понятия стереометрии: Точка, Прямая, Плоскость, Расстояние между двумя точками

Соотношения между ними: ?

Обозначения: т.А, прямая (AB), плоскость (ABC) или α

Вопрос 2

Аксиомы стереометрии:

0. [Существование плоскостей] В пространстве существуют плоскости. В каждой плоскости выполняются все аксиомы планиметрии.

1. [Аксиома плоскости] Через любые три точки, не лежащие на одной прямой можно провести плоскость, и притом только одну.

2. [Аксиома прямой и плоскости] Прямая, проходящая через две точки плоскости лежит в этой плоскости.

3. [Аксиома пересечения плоскостей] Если две плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть прямая.

4. [Аксиома расстояния] Расстояние между любыми двумя точками пространства одно и то же на любой плоскости, проходящей через эти точки.

Вопрос 3

Следствия из аксиом:

1. Через любую прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

Доказательство:

Пусть даны прямая a и точка M , причем $M \notin a$. Нужно доказать, что плоскость, проходящая через a и M , существует и единственна.

Существование. Возьмем на прямой a две точки: P и Q . По аксиоме 0 существует плоскость (PQM) , проходящая через эти точки. Т.к. P и Q принадлежат этой плоскости, то по аксиоме 2 a принадлежит этой плоскости.

Единственность. Искомая плоскость должна проходить через три точки: P, Q, M , не лежащие на одной прямой (Если она проходит через другие точки прямой a , то P и Q будут принадлежать этой плоскости, так как a будет ей принадлежать). Следовательно, по аксиоме 0 она единственна. **Q.E.D.**

2. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

Доказательство:

Пусть даны две прямые, a и b , пересекающиеся в точке O . Докажем, что плоскость, проходящая через a и b , существует и единственна.

Существование. Возьмем на прямой a точку A , а на прямой b точку B . По аксиоме 0 существует плоскость (AOB) . Так как точки A и O лежат в ней, то по аксиоме 2, a принадлежит ей. Аналогично с b .

Единственность. Искомая плоскость должна проходить через 3 точки, не лежащие на одной прямой, следовательно она единственная (уточнение см. в предыдущем пункте). **Q.E.D.**

3. Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

Доказательство:

По определению параллельных прямых существует плоскость, в которой они лежат. Она одна, так как иначе две плоскости будут пересекаться в двух не совпадающих прямых, то есть иметь больше 2х общих точек, не лежащих на одной прямой.

Вопрос 4

Взаимное расположение двух прямых в пространстве: Две прямые в пространстве, либо пересекаются, либо параллельны, либо скрещиваются.

Определение. Две прямые называются пересекающимися, если они имеют общую точку. (Она одна и это доказывается сведением к планиметрии)

Определение. Две прямые называются параллельными, если они лежат в некой плоскости и не имеют общих точек.

Определение. Две прямые называются скрещивающимися, если они не имеют общих точек и не параллельны.

Признак скрещивающихся прямых: Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а вторая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются.

Доказательство:

Пусть прямая a лежит в плоскости α , а прямая b пересекает ее в точке M , не принадлежащей a . Докажем, что a и b скрещиваются.

Предположим, что это не так. Тогда они либо пересекаются, либо параллельны. В обоих случаях через них можно провести плоскость. Но через прямую a и точку $M \notin a$ можно провести только одну плоскость. Это означает, что $b \in \alpha$. Противоречие. **Q.E.D.**

Вопрос 5

Параллельность прямой и плоскости:

Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости: Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельная какой-либо прямой, лежащей в плоскости, то эта прямая и плоскость параллельны.

Доказательство:

Обозначим данные прямую и плоскость a и β соответственно. Пусть $a \parallel b$, где $b \subset \beta$ и $a \not\subset \beta$. Предположим, что прямая a и плоскость β не параллельны. Тогда они имеют общую точку M . M не принадлежит b , так как $a \parallel b$. Таким образом a и b скрещиваются, что противоречит условию. **Q.E.D.**

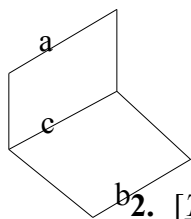
Теорема о линии пересечения двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости: (теорема о линии пересечения) Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Доказательство:

Пусть плоскость β пересекает γ по прямой b и проходит через прямую a , такую, что $a \parallel \gamma$. Тогда прямые a и b лежат в плоскости β , причем a не пересекает b (иначе точка их пересечения лежала бы в плоскости γ , что противоречит параллельности прямой a и плоскости γ). Следовательно, $a \parallel b$. **Q.E.D.**

Следствия:

1. [О линии пересечения двух плоскостей, проходящих через две параллельные прямые] Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых.



Доказательство:

Пусть $b \parallel a$. Через них проведены соответственно плоскости β и γ , причем β пересекает γ по прямой c . Докажем, что $c \parallel a$ и $c \parallel b$. Действительно, поскольку b лежит в β , а $a \parallel b$, то $a \parallel \beta$ по признаку параллельности. γ проходит через $a \parallel \beta$, $c = \gamma \cap \beta$, что по теореме о линии пересечения, $c \parallel a$. Аналогично для b и β .

2. [Транзитивность параллельности прямых] Если $a \parallel b$, $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Доказательство:

Если они все лежат в одной плоскости, то это очевидно в силу теорем планиметрии. Если же нет, то возьмем на прямой a точку M и проведем плоскость α через c и M , через b и M плоскость β . Согласно второму следствию, линия пересечения α и β параллельна c и b . Но через точку M можно провести только одну прямую, параллельную прямой b ($a \parallel b$, $M \in a$), поэтому линия пересечения плоскостей α и β и прямая a — это одна и та же прямая. Следовательно, $c \parallel a$. **Q.E.D.**

3. [Свойство линии пересечения плоскостей, параллельных данной прямой] Если α и β параллельны прямой b и пересекаются, то линия их пересечения a параллельна b .

Доказательство:

Так как $b \parallel \alpha$, то существует d , лежащая в α и параллельная b . Аналогично существует e , лежащая в β и параллельная b . И следствия 1 и транзитивности получаем, что $d \parallel a \parallel e$. Но $b \parallel d \parallel e$, следовательно $a \parallel b$. **Q.E.D.**

Вопрос 6

Параллельность плоскостей:

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности плоскостей:

Определение. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство:

Пусть a и b — прямые в плоскости α , а c и d — прямые в плоскости β , причем a пересекает b в точке M , и $a \parallel c$, $b \parallel d$. Предположим, что α и β не параллельны, то есть пересекаются по прямой e . Тогда по следствию 1 из вопроса 5 получаем, что $e \parallel a \parallel c$, а также $e \parallel b \parallel d$, то есть $a \parallel b$, что противоречит условию. Следовательно, $\alpha \parallel \beta$. **Q.E.D.**

Теоремы о параллельных плоскостях:

1. [Свойство линий пересечения двух параллельных плоскостей с третьей плоскостью] Если плоскости α и β параллельны а γ пересекает их по прямым a и b соответственно, то $a \parallel b$.

Доказательство:

Предположим, что эти прямые не параллельны, тогда они пересекаются (ведь они лежат в плоскости γ). То есть a пересекает b в точке M . При этом a принадлежит плоскости α , а b — плоскости β , следовательно M — общая точка плоскостей α и β , что противоречит условию. Следовательно, $a \parallel b$. **Q.E.D.**

2. [Равенство отрезков параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями] Отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями равны.

Доказательство:

Пусть у нас есть плоскости $\alpha \parallel \beta$ и прямые $a \parallel b$. a пересекает α в точке A , β в точке B , b пересекает α в точке C , β в точке D . Требуется доказать, что

$$AB=CD.$$

Проведем плоскость γ через a и b . γ пересекает плоскости α и β по прямым $AC \parallel BD$ (Свойство 1) соответственно. Но $AB \parallel CD$. При этом все они лежат в плоскости γ . Следовательно, $ABCD$ – параллелограмм, у которого противоположные стороны равны. **Q.E.D.**

3. [Существование и единственность плоскости, параллельной данной и проходящей через данную точку] Через каждую точку плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

Доказательство:

Пусть нам дана плоскость α и точка A .

Существование. Возьмем в плоскости α произвольную точку B и проведем через нее две прямые a и b . Через точку A проведем прямые c и d такие, что $a \parallel c$, $b \parallel d$. Возьмем плоскость β , образованную прямыми c и d . По признаку она параллельная α . A — принадлежит плоскости β . That's it!

Единственность. Предположим, что это не так и существует две плоскости β_1 и β параллельные α и проходящие через A . Так как у этих двух плоскостей есть общая точка A , то есть и общая прямая m . Возьмем в α прямую l , не параллельную m и не пересекающую ее. Через точку A и прямую l проведем плоскость γ , которая пересекает плоскости β и β_1 (так как имеет с ними общую точку A) по прямым b и b_1 соответственно. По свойству 1, $b \parallel l$, $b_1 \parallel l$. Таким образом, $b \parallel b_1$, противоречие (b пересекает b_1 в точке A). Следовательно $\beta = \beta_1$. **Q.E.D.**

Вопрос 7

Параллельное и центральное проектирование:

Определение. Проекцией точки M на плоскость α по прямой l называется точка пересечения прямой $m \parallel l$ такой, что $M \in m$, и плоскости α .

Определение. Параллельным проектированием фигуры Φ на плоскость α по направлению l называется такое отображение, ставящее в соответствие каждой точке $M \in \Phi$ ее проекцию на плоскость α .

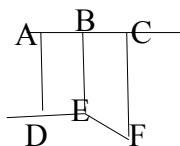
Определение. Центральной проекцией точки M на плоскость α с центром S называется точка пересечения прямой (SM) с плоскостью α .

Определение. Центральным проектированием фигуры Φ на плоскость α с центром S называется отображение, ставящее каждой точке M фигуры Φ в соответствие центральную проекцию этой точки на плоскость α с центром S .

Свойства: (Имеем ввиду, что при данном направлении проектирования данные прямые и отрезки проектируются не в точку)

1. Проекция прямой есть прямая, проекция отрезка — отрезок.

Доказательство:



Прямая. Предположим, что это не так. Тогда возьмем такие три точки A, B, C на прямой a , которые проектируются в точки D, E, F на плоскости α по направлению l соответственно, причем $F \notin (DE)$. Так как $AD \parallel BE$, то существует плоскость β такая, что $AD \in \beta$ и $BE \in \beta$. Таким образом $AB \in \beta$. Откуда следует, что $C \in \beta$, но $CF \parallel BE$. Следовательно, она должна проходить в плоскости β . **Q.E.D.**

Отрезок. Пусть отрезок AB проектируется на плоскость α по прямой a . Тогда $(AB) \rightarrow (KL) \in \alpha$, $A \rightarrow K$, $B \rightarrow L$. Предположим, что это не так, тогда существует $C \in [AB]$ такая, что $C \rightarrow D$, где $D \in (AB)$, но $D \notin [AB]$. При этом, CD принадлежит плоскости β , образованной прямыми AK и BL . Получаем, что C пересекает либо AK , либо BL . Противоречие с условием. **Q.E.D.**

2. Две параллельные прямые проектируются либо в две параллельные прямые,

либо в одну и ту же прямую.

Доказательство:

Пусть даны две прямые $a \parallel b$, которые проектируются по направлению l на плоскость γ . Тогда $a \rightarrow a_l, b \rightarrow b_l$, а точка $D \in a \rightarrow D_l \in a_l, A \in b \rightarrow A_l \in b_l$. Возьмем плоскость α , образованную прямыми a и a_l (они пересекаются, иначе все просто через транзитивность) и плоскость β от b и b_l . Тогда $\alpha \cap \gamma = a_l, \beta \cap \gamma = b_l$. $a \parallel b$, При этом, $DD_l \parallel AA_l$. Таким образом по признаку параллельных плоскостей, α и β параллельны ($DD_l \parallel AA_l, a \parallel b$, они пересекаются). По свойству параллельных плоскостей, пересекающихся секущей плоскостью, $a_l \parallel b_l$. **Q.E.D.**

3. Длины проекций параллельных отрезков или отрезков, лежащих на одной прямой пропорциональны длинам этих отрезков.

Доказательство:

На одной прямой. Пусть прямая AC ($B \in [AC]$) проецируется в прямую DF ($E \in [DF]$) в плоскости α , а $B \rightarrow E$. Тогда надо доказать, что $AB/BC = DE/EF$. Так как $AD \parallel BE$, то от них можно образовать плоскость β . $CF \in \beta$, так как $C \in (AB), F \in (DE)$, а (AB) и (DE) лежат в β . Таким образом, исходя из теоремы о пропорциональных отрезках, $AB/BC = DE/EF$. **Q.E.D.**

Параллельные отрезки. Отрезки $AB \parallel CD$ проектируются в отрезки $KE \parallel MN$. На луче $[BA)$ отложим от начала отрезок BR , равный CD . $R \rightarrow L$. Он будет проектироваться в отрезок NL , причем $N \in ML$. По первой части $MN/NL = AB/BR$. Но при этом $BR = CD$ и $BR \parallel CD$. Следовательно, $BRCD$ — параллелограмм. Следовательно, $DR \parallel CB$. Так как $DR \rightarrow EL, CB \rightarrow KN$, то $EL \parallel KN$, но так как $CD \parallel BR$, то $KE \parallel NL$, то есть $KENL$ — параллелограмм, откуда следует, что $KE = NL$, то есть $AB/BR = MN/NL \Leftrightarrow AB/CD = MN/KE$. **Q.E.D.**

Вопрос 7

Изображение фигур:

Определение. Изображением фигуры называется любая фигура, подобная параллельной проекции данной фигуры на некоторую плоскость.

Изображение треугольника: Изображением данного треугольника может служить любой треугольник.

Доказательство:

Пусть у нас есть 2 треугольника — ABC и $A_1B_1C_1$. Требуется доказать, что $A_1B_1C_1$ может быть изображением ABC . Если это так, то в некой плоскости существует треугольник, подобный $A_1B_1C_1$. Проведем некую плоскость α такую, что $AC \subset \alpha, B \notin \alpha$. Тогда построим треугольник $ACK \sim A_1B_1C_1$. Если мы в качестве направления проектирования возьмем BK , а в качестве плоскости α , то проекцией ABC будет являться $ACK \sim A_1B_1C_1$. **Q.E.D.**

Изображение параллелограмма: Изображением параллелограмма может служить любой параллелограмм.

Доказательство:

Параллелограмм $ABCD$ — это фигура, состоящая из четырех треугольников, симметричная относительно центра O . Исходя из предыдущего свойства, $ABO \rightarrow A_1B_1O_1$ (произвольный треугольник), после чего в силу свойств проектирования (1 и 3, см. следующее док-во) мы однозначно восстанавливаем другие точки симметрично относительно точки O , получая по признаку параллелограмм. **Q.E.D.**

Изображение правильного шестиугольника: Изображением правильного шестиугольника может являться любой симметричный шестиугольник.

Доказательство:

Пусть у нас есть правильный шестиугольник $ABCDEF$ (центр O). $ABCO$ — параллелограмм, следовательно его изображение $A_1B_1C_1O_1$ — любой параллелограмм. Поскольку правильный шестиугольник симметричен, то в силу свойств 1 и 3 параллельного проектирования, мы можем однозначно восстановить остальные точки, получив симметричный шестиугольник. **Q.E.D.**

Вопрос 8

Многогранник:

Определение. Многогранником называется тело, ограниченное конечным числом плоскостей. Плоскости образуют грани многогранника. Стороны получающихся многоугольников называются ребрами. Концы ребер — его вершинами.

Призма:

Определение. Призма — это многогранник, две грани которого — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а все ребра, не лежащие в этих плоскостях, параллельны между собой.

Параллелепипед:

Определение. Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы.

Свойства.

1. Противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.

Доказательство:

Пусть у нас есть параллелепипед $ABCDKLMN$. $KNML$ и $ABCD$ — параллелограммы, а $ND \parallel MC \parallel LB \parallel KA$. Так как $MC \parallel LB$, $CD \parallel AB$, и MC пересекает CD в точке C , то $(MCD) \parallel (ABL)$. При этом $DN \parallel MC$, то есть $ND \in (MCD)$, а прямые NM и DC принадлежат (MCD) , так как N, M, D, C принадлежат ей. Аналогично для (ABL) т. о. $(DCM) \parallel (ABL)$. При этом, $AKLB$ и $DNMC$ — параллельные параллелограммы, у которых $NM=KL=CD=AB$. При этом, $ND=MC=LB=AK$. Следовательно, они равны. **Q.E.D.**

2. Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Доказательство:

Пусть у нас есть параллелепипед $ABCDKLMN$. $KNML$ и $ABCD$ — параллелограммы. $KC \cap NB = O$, $KB \cap AL = O_1$. При параллельном переносе по направлению ML на плоскость (KLA) $M \rightarrow L$, $C \rightarrow B$, $O \rightarrow O_1$. Поскольку перенос сохраняет расстояния, то, так как KB и AL — диагонали параллелограмма, то $KO_1 = O_1B$ и, следовательно, $KO = OC$. $AO = OM$ аналогично. Схожие действия проводятся для MA и NB , получая, что MA пересекается KC и NB посередине, то есть, в одной точке. И такими же действиями доказывается для диагонали LD .

Q.E.D.

Пирамида.

Определение. Пирамида — это многогранник, одна из граней которого — произвольный многоугольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной.

Усеченная пирамида.

Определение. Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между плоскостью основания и плоскостью параллельной плоскости основания и пересекающей все боковые ребра пирамиды.

Вопрос 10.

Сечение многогранников.

Определение. Если пересечением многогранника и плоскости является многоугольник, то он называется сечением многогранника указанной плоскостью.

Конспект составлен 27 октября 2010 года

Автор и редактор: **Старостин Андрей**

Редакция №3

Литература: Калинин А.Ю., Терешин Д.А., Стереометрия 10, Главы 0-2, М.: МФТИ, 1996